

**J. W. Goethe-Universität Frankfurt**  
**Seminar SS '96**  
**Analysis numerischer Methoden**

**Thema : Spline-Interpolation**

**Author : Stefan Steinhaus**

**Datum : Samstag, 27. Dezember  
1997**

# Inhaltsverzeichnis

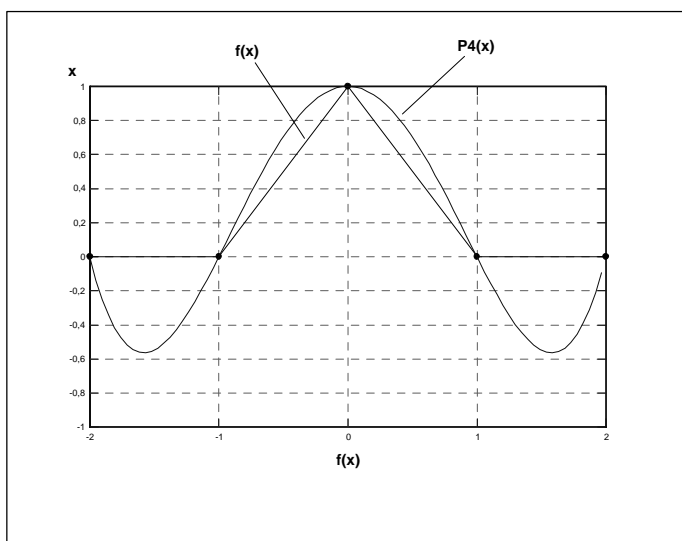
<b>Inhalt</b>	<b>Seite</b>
<b>1. Einleitung</b>	
1.1 Interpolationen	1
1.2 Spline-Interpolationen	1
<b>2. Kubische Splines</b>	2
2.1 Herleitung von kubischen Splines	2 - 5
2.2 Splineräume	5 - 6
2.3 Beispielrechnung	6 - 7
<b>3. Krümmung eines Splines</b>	8 - 9
<b>4. B-Splines</b>	10
4.1 Splineräume	11 - 12
4.2 Herleitung von B-Splines	12 - 14
4.3 Herleitung von kubischen B-Splines	15
4.4 Beispielrechnung	16
 <b>Anhang : Literaturverzeichnis</b>	 17

# 1. Einleitung

## 1.1. Interpolationen

In der Praxis kommt es vor allem in physikalischen Anwendungen und im Ingenieurwesen zu der Problematik, daß eine Anzahl von diskreten Funktionswerten vorliegen und es aber nötig ist Werte zwischen den vorgegebenen Werten möglichst naturgetreu zu errechnen bzw. zu approximieren. Dies erreichen wir dadurch indem wir die vorgegebenen y-Werte als Ergebnisse einer uns nicht bekannten Funktion  $f^{(j)}(t_i)$  ansehen und nun versuchen eine möglichst günstige Funktion hierfür zu finden.

Traditionell werden für die Lösung dieser Problematik sogenannte Interpolationsverfahren verwendet, die eine Funktion  $\varphi^{(j)}(t_i)$ , meist polynomiell, trigonometrisch oder exponentiell, an den bestehenden Datenbestand so anpaßt, so daß für alle  $i, j$   $\varphi^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i)$  gilt.



Diese Aussage gibt allerdings noch nichts über die Qualität und die Nutzbarkeit für bestimmte Anwendungen her und so verwundert es nicht, daß die klassischen Interpolationsverfahren einige recht üble Nachteile haben. Wird z.B. eine polynomielle Funktion höheren Grades als Interpolationsfunktion verwendet (siehe Bild), so kann es zu recht extremen Oszillationen der Kurve kommen. In Konstruktionsanwendungen wie dem Schiffsbau oder der Flugzeugindustrie sind solche starken Oszillationen allerdings höchst unerwünscht, hier werden nur leicht gebogene, anschmiegsame Kurven zwischen

den einzelnen Stützstellen benötigt (man stelle sich einen Schiffsrumpf im Sägezahnformat vor...).

## 1.2. Spline-Interpolationen

Speziell für das eben beschriebene Problem bei klassischen Interpolationen sind die sogenannten Splines (englische Bezeichnung für ein biegsames Kurvenlineal, welches man zum Zeichnen einer glatten Kurve durch endlich viele Punkte benutzt) bzw. im Deutschen Straaks erfunden worden. Splines versuchen nicht eine Funktion über alle Stützstellen zu interpolieren sondern nur lokal über jeweils zwei Stützstellen  $(t_i, y_i)$  und  $(t_{i+1}, y_{i+1})$  für  $i=0, \dots, n-1$ .

Diese Splines wirken glättend und haben nur eine sehr geringe Welligkeit, geben somit den Verlauf einer Kurve wirklichkeitsgetreuer wieder. Am Häufigsten werden hierbei lineare oder kubische Splines verwendet, die durch eine lineare Funktion bzw. einem Polynom 3. Grades interpoliert werden. Für alle Splines  $s(t)$  mit  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  gelten hierbei folgende 3 Regeln :

1.  $s(t_i) = y_i$  für  $i=0, 1, \dots, n$  (Ausnahme sind hierbei die B-Splines)
2.  $s$  ist in  $[t_0, t_n]$  zweimal stetig differenzierbar
3. die Gesamtkrümmung von  $s$  ist minimal, so daß für jede Funktion  $\bar{s}$  gilt

$$\int_{t_0}^{t_n} s''(t)^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_n} \bar{s}''(t)^2 dt$$

## 2. Kubische Splines

Unter Splines der Ordnung  $k$  (in diesem Fall im Speziellen die kubischen Splines für  $k=4$ ) versteht man die lokale Interpolation von Polynomen beliebigen Grades. Es wird hierbei jeweils ein Polynom  $(k-1)$ -ten Grades zwischen jeweils zwei Punkten  $t_i$  und  $t_{i+1}$  interpoliert, so daß wir für  $n$  Punkte genau  $n-1$  verschiedene Polynome erhalten. Diese Methode der Interpolation wird meistens für  $k=2$  als lineare Splines oder für  $k=4$  als kubische Splines im Speziellen bei der Kurvenanpassung im Bereich der Computergrafik verwendet.

### 2.1. Herleitung von kubischen Splines

Gegeben :

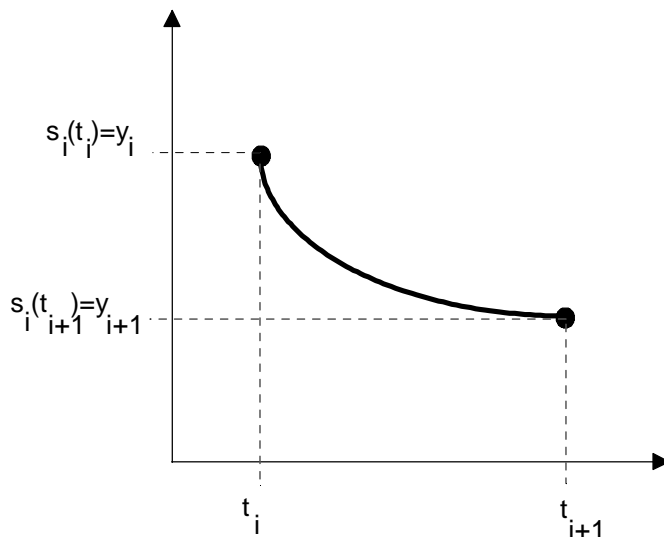
Gegeben sei eine Menge von paarweisen Stützstellen  $(t_i, y_i)$  für  $i=0, \dots, n$ , so daß für die Knoten des Gitters  $\Delta$  gilt, daß alle Knoten paarweise in der folgenden Art und Weise angeordnet sind :  
 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Gesucht :

Gesucht ist eine Menge von kubischen Splinefunktionen  $s_i(t)$  für die gilt, daß  $s(t)$  auf dem Gitter  $\Delta$  (also  $[t_0, t_n]$ ) zweimal stetig differenzierbar ist. Es muß somit also  $s_i(t_{i+1}) = s_{i+1}(t_{i+1})$ ,  $s_i'(t_{i+1}) = s_{i+1}'(t_{i+1})$  und  $s_i''(t_{i+1}) = s_{i+1}''(t_{i+1})$  gelten.

Unter einem kubischen Spline  $s_i(t)$  verstehen wir eine lokale Interpolation an einem Polynom 3. Grades. Lokal bedeutet in diesem Zusammenhang, daß wir jeweils für jedes  $i$ -te Intervall zwischen den Punkten  $(t_i, y_i)$  und  $(t_{i+1}, y_{i+1})$  ein neues Polynom anpassen. Gegeben sei ein Polynom 3. Grades

$$s_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i$$



Eingesetzt bedeutet dies für die beiden Endpunkte eines Intervalles

$$s_i(t_i) = a_i(t_i - t_i)^3 + b_i(t_i - t_i)^2 + c_i(t_i - t_i) + d_i = d_i = y_i$$

$$s_i(t_{i+1}) = a_i(t_{i+1} - t_i)^3 + b_i(t_{i+1} - t_i)^2 + c_i(t_{i+1} - t_i) + d_i = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = y_{i+1}$$

(Wir setzen  $h_i = t_{i+1} - t_i$ )

Um nun die Steigung und die Krümmung des Polynoms pro Intervall einfließen zu lassen bzw. um die uns unbekannt Parameter zu errechnen benötigen wir jetzt die 1. und 2. Ableitung.

$$s_i'(t) = 3a_i(t - t_i)^2 + 2b_i(t - t_i) + c_i$$

$$s_i''(t) = 6a_i(t - t_i) + 2b_i$$

Um für die weiteren Rechnungen die Übersichtlichkeit ein wenig zu wahren verwende ich von nun an für die 2. Ableitung im Punkt  $(t_i, y_i)$  den Buchstaben  $S_i$  und im Punkt  $(t_{i+1}, y_{i+1})$  den Buchstaben  $S_{i+1}$ . Als nächstes müssen wir nun die gegebenen Gleichungen so auflösen, daß wir die Parameter  $a, b, c, d$  nur in Abhängigkeit von  $y$  bzw.  $S$  erhalten.

$$d_i = y_i$$

$$s_i''(t_i) = S_i = 6a_i(t_i - t_i) + 2b_i = 2b_i$$

$$b_i = \frac{S_i}{2}$$

$$s_i''(t_{i+1}) = S_{i+1} = 6a_i(t_{i+1} - t_i) + 2b_i = 6a_i h_i + 2b_i = 6a_i h_i + 2 \frac{S_i}{2} = 6a_i h_i + S_i$$

$$a_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}$$

$$s_i(t_{i+1}) = y_{i+1} = a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i} h_i^3 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

$$= \frac{S_{i+1} - S_i}{6} h_i^2 + \frac{S_i}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$

Da wir ebenfalls wissen, daß die Steigung im Punkt  $(t_i, y_i)$  für das linksseitige Polynom gleich dem rechtseitigen Polynom ist, können wir nun ein Gleichungssystem zum Lösen der noch benötigten Unbekannten  $S_i$  und  $S_{i+1}$  aufstellen. Die Ableitungen im Punkt  $(t_i, y_i)$  lauten dabei :

$$s_i'(t_i) = 3a_i(t_i - t_i)^2 + 2b_i(t_i - t_i) + c_i = c_i$$

$$s_{i-1}'(t_i) = 3a_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

Wir setzen voraus daß

$$s_i'(t_i) = s_{i-1}'(t_i)$$

gilt und somit können wir durch Einsetzen der oben erhaltenen Gleichungen für  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  und Vereinfachen der resultierenden Gleichung folgendes Gleichungssystem herleiten :

$$c_i = 3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} = 3 \left( \frac{S_{i-1} - S_{i-1}}{6h_{i-1}} \right) h_{i-1}^2 + 2 \left( \frac{S_{i-1}}{2} \right) h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2h_{i-1} S_{i-1} + h_{i-1} S_i}{6}$$

$$h_{i-1} S_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i) S_i + h_i S_{i+1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

Wir erhalten somit folgendes allgemeines Gesamtkonzept zum Berechnen der benötigten Koeffizienten :

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n-1} \end{bmatrix}$$



$$h_{n-1}S_{n-1} + 2h_nS_n = 6\left(B - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

Die Methoden 1 und 2 sind allerdings nicht sonderlich beliebt, da die 1 Methode einer linearen Fortsetzung des Kurvenlaufes relativ unnatürlich ist und die Methode 2 gemäß einer Parabel das gegenteilige Extrem darstellt, was genauso unnatürlich ist.

## 2.2. Splineräume

Für das Verständnis von Splines bzw. deren Herleitung benötigen wir noch einige grundlegende Gedankengänge die wir nachfolgend erst einmal erklären müssen.

Gehen wir von den Gegebenheiten eines Gitters  $\Delta = \{t_0, \dots, t_{n+1}\}$  mit den paarweisen verschiedenen Knoten  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = b$  und der Maschenweite  $h_i = t_{i+1} - t_i$  aus ( $h_i$  muß nicht zwingend äquidistant sein), so läßt sich ein Spline  $s$  der Ordnung  $k$  vom Grad  $k-1$  über jedes Intervall  $[t_i, t_{i+1}]$  definieren. Alle Spline-Polynome  $s_i \in P_{k-1}$  definieren hierbei den Splineräum  $S_{k,\Delta}$ . Dieser Vektorraum  $S_{k,\Delta}$  enthält alle Polynome vom Grad  $k-1$  und zudem die abgebrochenen Potenzen vom Grad  $k$

$$(t - t_i)_+^k = \begin{cases} (t - t_i)^k & \text{falls } t \geq t_i \\ 0 & \text{falls } t < t_i \end{cases}$$

Die Monome vom Grad  $k-1$  ( $1, t, \dots, t^{k-1}$ ) bilden mit den abgebrochenen Potenzen zusammen eine Basis  $B = \{1, t, \dots, t^{k-1}, (t - t_1^{k-1}), \dots, (t - t_n^{k-1})\}$  zum Splineräum  $S_{k,\Delta}$ . Die Dimension dieser Basis beträgt hierbei  $\dim S_{k,\Delta} = k + n$ .

Beweis :

1. Beweisen wir für diesen Splineräum erst einmal die Dimension bzw. die Notwendigkeit von max.  $k+n$  Freiheitsgraden eines Splines. Dies ist leicht nachzuweisen, da wir im ersten Teilintervall  $[t_0, t_1]$  genau  $k$  freie Parameter haben, allerdings in jedem nachfolgenden Intervall immer nur einen weiteren freien Parameter, da die anderen Parameter jeweils immer vom vorhergehenden Intervall abhängen. Es ergeben sich somit aus dem ersten Intervall  $k$  Parameter und aus den restlich  $n$  Intervallen jeweils 1 Parameter, somit insgesamt  $k+n$  freie Parameter. Es steht somit  $\dim S_{k,\Delta} \leq k + n$  fest.
2. Was damit noch nicht bewiesen ist, ist der Tatbestand daß die von uns vorgegebene Basis  $B$  auch wirklich linear unabhängig ist und somit den Splineräum aufspannt. Schauen wir uns dazu den Spline  $s$  an

$$s(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i + \sum_{i=1}^n c_i (t - t_i)_+^{k-1} = 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

Wenden wir hierauf die linearen Funktionale (mit  $f(t^+)$  und  $f(t^-)$  als rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert)

$$G_i(f) = \frac{1}{(k-1)!} (f^{(k-1)}(t_i^+) - f^{(k-1)}(t_i^-))$$

an, so erhalten wir

$$0 = G_i(s) = G_i\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j\right) + \sum_{j=1}^n c_j G_i(t - t_j)_+^{k-1} = c_i$$

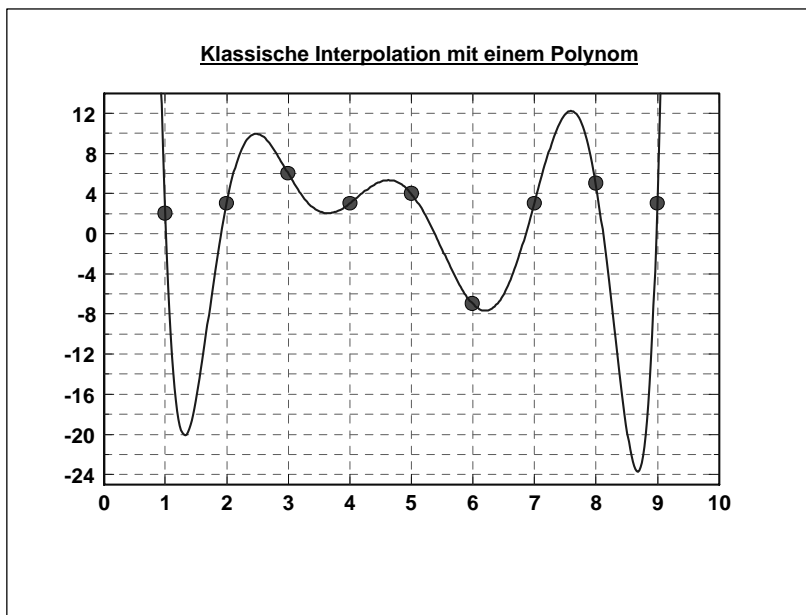
Da aber  $G_i(t - t_j)_+^{k-1} = \delta_{ij}$  ist und  $G_i\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j t^j\right) = 0$  ist folgt damit für  $s(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i = 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und daher ist auch  $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$ , somit also linear unabhängig für die von uns definierte Basis gegeben.

Nach Deuffhard (S. 237) und wie wir auch später noch im Vergleich der Herleitung von kubischen und B-Splines erkennen können, hat diese Definition der Basis für einen Splineräum einige signifikante Nachteile. Hierzu gehört unter anderem die „fast“ lineare Abhängigkeit von „sehr“ dicht nebeneinander liegenden Knoten  $t_i, t_{i+1}$ , die sich fast schon selbst erklärt wenn man

sich die nachfolgende praktische Herleitung von kubischen Splines anschaut. Außerdem ergibt sich bei dieser Art von Splineräumen der Nachteil, daß sich Änderungen der Parameter  $c_i$  fatal auf den Gesamtverlauf des Splines auswirken, da sich die Parameter jeweils nicht nur auf das aktuelle Intervall auswirken sondern auch auf das nachfolgende Intervall. Jede lokale Änderung wirkt sich somit auch global aus.

### 2.3. Beispielrechnung

Nehmen wir die Stützstellen  $\{t,y\}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,6\},\{4,3\},\{5,4\},\{6,-7\},\{7,3\},\{8,5\},\{9,3\}\}$  an, die für eine klassische Interpolation einen recht extremen Kurvenverlauf haben (siehe Grafik).



$t_i$	$y_i$	$h_i$	$f[t_i, t_{i+1}]$
1	2	1	1
2	3	1	3
3	6	1	-3
4	3	1	1
5	4	1	-11
6	-7	1	10
7	3	1	2
8	5	1	-2
9	3		

Unter der Annahme daß der Kurvenverlauf außerhalb des definierten Bereiches linear verhält ergibt sich somit folgende Rechnung ( $S_0=0, S_n=0$ ) :



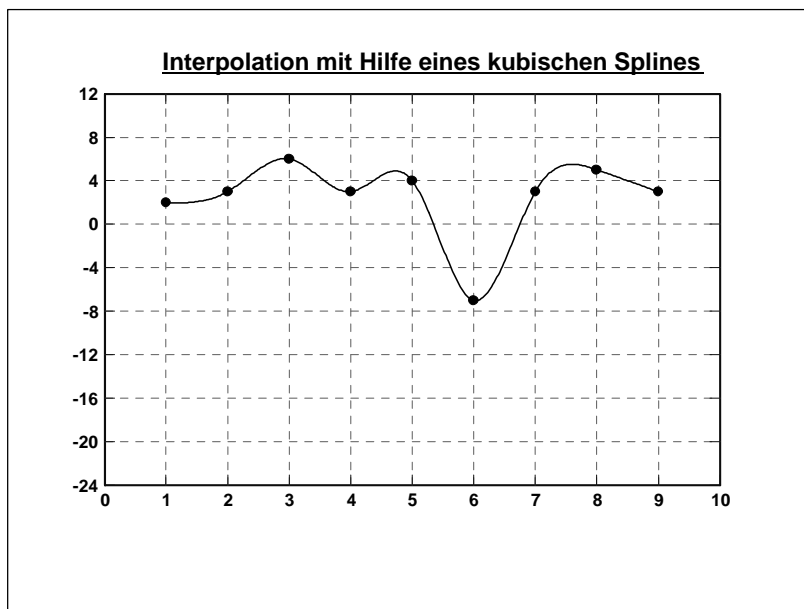
$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & 4 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -36 \\ 24 \\ -72 \\ 126 \\ -48 \\ -24 \end{bmatrix}$$

$S_0=0$ ,  $S_1=6.822349043$ ,  $S_2=-15.28939617$ ,  $S_3=18.33523564$ ,  $S_4=-34.05154639$ ,  
 $S_5=45.87094993$ ,  $S_6=-23.43225332$ ,  $S_7=-0.141936671$ ,  $S_8=0$

Nach den aus der Herleitung bekannten Gleichungen für  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  ergeben sich somit folgende Parameter für die 8 Polynome :

$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
1,1370582	0	-0,1370581	2
-3,6852909	3,4111745	3,2741163	3
5,6041053	-7,6446981	-0,9594072	6
-8,7311303	9,1676178	0,5635125	3
13,320416	-17,025773	-7,2946429	4
-11,550534	22,935475	-1,3849411	-7
3,8817194	-11,716127	9,8344072	3
0,0236561	-0,0709683	-1,9526878	5

Stellen wir nun einmal grafisch die Kurve mit Hilfe der berechneten Splinefunktionen dar, so ergibt sich folgende, wesentlich flachere Kurve im Vergleich zum klassischen Polynom :



### 3. Krümmung von Splines

In der Einleitung habe ich erwähnt, daß alle Arten von Splines 3 verschiedenen Kriterien entsprechen müssen. 2 davon ergeben sich bereits aus den Herleitungen der entsprechenden Splintypen, das 3. allerdings, bei der es sich um ein elementares Kriterium handelt weswegen Splines überhaupt erst erfunden wurden, möchte ich hier erst noch einmal genauer definieren. Das dritte und wichtigste Kriterium betraf die Krümmung (oder auch Welligkeit) der Splines und wurde wie folgt von mir angegeben

$$\int_{t_0}^{t_n} s''(t)^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_n} \bar{s}''(t)^2 dt$$

Die elementare Aufgabe der Splines  $s(t)$  war es eine möglichst „glatte“ Kurve an eine gegebene Menge von Stützstellen zu interpolieren, so daß nach Möglichkeit keine „normale“ Interpolationskurve  $y(t)$  weniger wellig ist (oder weniger stark gekrümmt). Hierfür brauchen wir erst einmal die Definition der Krümmung einer Kurve an der Stelle  $t \in [a, b]$  eines beliebigen Intervalles  $[a, b]$ , die wir wie folgt definieren

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Haben wir eine nur sehr kleine Steigung  $y'(t)$  so können wir eine vereinfachte Näherung für die Krümmung  $\kappa(t)$  schreiben

$$\frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''(t)$$

Gedanklich kann man sich die Krümmung an Hand eines Schmiegekreises vorstellen, dessen inverses Radius genau dem Betrag der Krümmung entspricht. Dies ist gleichbedeutend mit der Darstellung eines Schmiegekreises mit dem Radius  $r = \infty$  falls sich unsere interpolierte Kurve als Gerade darstellt.

Mit Hilfe der euklidischen Norm läßt sich nun die Gesamtkrümmung der Kurve wie folgt darstellen

$$\|y''(t)\|_2 = \left( \int_a^b y''(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

#### Definition :

Gehen wir von einem beliebigen kubischen Spline  $s(t)$  aus, so gilt auf dem Intervall  $[a, b]$  mit der Bedingung

$$[s''(t)(y'(t) - s'(t))]_a^b = 0$$

das

$$\|s''(t)\|_2 \leq \|y''(t)\|_2 \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b s''(t) dt \leq \int_a^b y''(t) dt$$

#### Beweis :

Diese Behauptung gilt es jetzt natürlich noch zu beweisen, was wir folgendermaßen trivial herleiten können. Setzen wir nämlich  $y''(t) = s''(t) + (y''(t) - s''(t))$  so erhalten wir aus vorhergehender Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b y''(t)^2 dt &= \int_a^b (s''(t) + (y''(t) - s''(t)))^2 dt \\ &= \int_a^b s''(t)^2 dt + 2 \int_a^b s''(t)(y''(t) - s''(t)) dt + \int_a^b (y''(t) - s''(t))^2 dt \geq \int_a^b s''(t)^2 dt \end{aligned}$$

Mit Hilfe der von uns geforderten Bedingung

$$[s''(t)(y'(t) - s'(t))]_a^b = 0$$

ergibt sich für

$$2 \int_a^b s''(t)(y''(t) - s''(t)) dt = 0$$

durch folgende Herleitung. Da ich diese Herleitung exemplarisch für einen kubischen Spline durchführe, kann ich davon ausgehen daß für die dritte Ableitung des Splines  $s'''(t) = s_i'''(t) = d_i$  gilt. Somit kann ich mit Hilfe der partiellen Integration folgende Beweisführung durchführen :

$$\int_a^b s''(t)(y''(t) - s''(t)) dt = [s''(t)(y'(t) - s'(t))]_a^b - \int_a^b s'''(t)(y'(t) - s'(t)) dt$$

Da wir ja wissen daß das Intervall  $[a, b]$  als  $a = t_0 < \dots < t_{i+1} = b$  definiert ist, können wir für  $t \in (t_i, t_{i+1})$  auch

$$\int_a^b s''(t)(y'(t) - s'(t)) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} d_i(y'(t) - s'_i(t)) dt$$

schreiben. Dies ergibt folgende Entwicklung unserer obigen Gleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(t)(y''(t) - s''(t)) dt &= - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} d_i(y'(t) - s'_i(t)) dt = - \sum_{i=1}^n d_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} y'(t) - s'_i(t) dt \\ &= - \sum_{i=1}^n d_i [(y(t_i) - s_i(t_i)) - (y(t_{i-1}) - s_i(t_{i-1}))] \end{aligned}$$

Da gemäß der Definition der Interpolationen  $y(t_i) = s_i(t_i) = f(t_i)$  gilt, ergibt sich somit

$$\int_a^b s''(t)(y''(t) - s''(t)) dt = 0$$

Und für unsere Behauptung ergibt sich somit

$$\int_a^b y''(t)^2 dt = \int_a^b s''(t)^2 dt + \underbrace{\int_a^b (y''(t) - s''(t))^2 dt}_{\geq 0} \geq \int_a^b s''(t)^2 dt$$

Die Minimaleigenschaft des Splines die wir als

$$E = \int_a^b \left( \frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 dt \approx \int_a^b y''(t)^2 dt = \|y''(t)\|_2^2$$

definiert haben nennt man auch Biegeenergie oder kleinste Auslenkung des gleichnamigen Zeichengerätes.

## 4. B-Splines

Die B-Splines sind eine ganz besondere Art der Interpolation die eigentlich den Voraussetzungen der Interpolation widersprechen, denn bei dieser Art der Interpolation muß der Kurvenverlauf nicht durch alle Stützpunkte gehen, was ja eigentlich die Bedingung für Interpolationen ist. B-Splines basieren wie auch Splines der Ordnung  $k$  auf Polynomen  $(k-1)$ -ten Grades, diese werden hier allerdings im Sinne von Bezierkurven parametrisch erklärt bzw. rekursiv definiert und haben den großen Vorteil daß die Änderung von Werten einzelner Punkte sich im Gegensatz zu den normalen Splines nur lokal auswirken und nicht auf alle Intervalle. Auch diese Art von Splines werden hauptsächlich für die Darstellung von Computergrafiken verwendet, hierbei vor allen bei sogenannten „Smoothing“-Funktionen bei Zeichenprogrammen. Die B-Splines werden hierbei vor allen zur Farbglättung verwendet um Bilder mit besonders „starken“ Farbdifferenzen einen fließenden Charakter zu geben.

### 4.1. Splineräume

#### Definition :

Gegeben sei eine beliebige Folge von aufsteigenden Knoten  $t_i$  bzw. deren erweiterte Knotenfolge  $\tau_i$ . Der gewünschte B-Spline der Ordnung  $k$  wird nun rekursiv über  $i$  wie folgt definiert :

$$N_{i,1}(t) = \chi_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$N_{i,k}(t) = \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{\tau_{i+k} - t}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

Falls der Fall  $\tau_i = \tau_{i+k}$  auftritt, Knoten also gleich sind, so gilt  $N_{i,k} = 0$ . Außerdem kann man aus dieser Definition des B-Splines noch folgende 3 Eigenschaften ableiten :

1.  $\text{supp } N_{i,k} \subset [\tau_i, \dots, \tau_{i+k}]$
2. Es gilt für alle  $N_{i,k}(t) \geq 0$  gemäß obiger Definition
3. Jedes  $N_{i,k}$  beschreibt ein Teilpolynom vom Grad  $\leq k-1$  auf dem Intervall  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$

Die rekursive Definition der B-Splines  $k$ -ter Ordnung ist somit jeweils aus 2 B-Splines  $k-1$ -ter Ordnung beschrieben.

#### Behauptung :

Der Splineräum  $S_{k,\Delta}$  der B-Splines hat die selbe Dimension wie auch die normalen Splines, nämlich  $\dim S_{k,\Delta} = k + l$ .

#### Beweis :

Zuerst wollen wir einmal eine Basis für diesen B-Splineräum definieren. Hierzu erklären wir die von uns definierten erweiterten Knoten  $\tau_i$  einmal genauer. Die Knoten  $t_i$  werden hierbei  $\Delta$  wie folgt zugewiesen  $\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{l+1} = b$ . Für die erweiterte Knotenfolge werden jeweils die Randknoten  $a$  und  $b$   $k$ -mal den erweiterten Knoten  $\tau_1 \dots \tau_k$  bzw.  $\tau_{n+1} \dots \tau_{n+k}$  zugewiesen.  $k$ -mal um jeden der  $n$  B-Splines  $k$ -ter Ordnung genau  $k$  Stützstellen zu geben. Daraus ergibt sich logischerweise eine Basis mit der Dimension  $\dim S_{k,\Delta} = k + l = n$ . Die Basis unseres Splineräumes stellen somit die  $k+1$   $N_{i,k}(t)$  dar. Hierfür ist es allerdings noch dringend erforderlich die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Um dies zeigen zu können müssen wir allerdings zuerst einmal den technischen Begriff der Marsden-Identität einführen.

#### Marsden-Identität :

Die Marsden-Identität sei auf  $t \in [a, b]$  und  $s \in R$  als

$$(t-s)^{k-1} = \sum_{i=1}^n \varphi_{i,k}(s) N_{i,k}(t) \text{ mit } \varphi_{i,k}(s) = \prod_{j=1}^{k-1} (\tau_{i+j} - s)$$

definiert.

Die Marsden-Identität läßt sich leicht per Induktion über  $k$  beweisen :

Für  $k=1$  gilt  $1 = \sum_{i=1}^n N_{i,1}(t)$

Nehmen wir an daß die Marsden-Identität für  $k-1$  bereits bewiesen ist, so ergibt sich für  $k$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_{i,k}(s) N_{i,k}(t) &= \sum_{i=2}^n \left( \frac{t-\tau_i}{\tau_{i+k-1}-\tau_i} \varphi_{i,k}(s) + \frac{\tau_{i+k-1}-t}{\tau_{i+k-1}-\tau_i} \varphi_{i-1,k}(s) \right) N_{i,k-1}(t) \\ &= \sum_{i=2}^n \prod_{j=1}^{k-2} (\tau_{i+j} - s) \underbrace{\left( \frac{t-\tau_i}{\tau_{i+k-1}-\tau_i} (\tau_{i+k-1} - s) + \frac{\tau_{i+k-1}-t}{\tau_{i+k-1}-\tau_i} (\tau_i - s) \right)}_{=t-s} N_{i,k-1}(t) \\ &= (t-s) \sum_{i=2}^n \varphi_{i,k-1}(s) N_{i,k-1}(t) = (t-s)(t-s)^{k-2} = (t-s)^{k-1} \end{aligned}$$

Definition :

Jedes Polynom  $k-1$ -ten Grades auf einem Intervall  $[a,b]$  läßt sich durch einen B-Spline der Ordnung  $k$  darstellen, es müssen also alle Polynome vom Grad  $\leq k-1$  in den von B-Splines aufgespannten Raum enthalten sein d.h.  $P_{k-1} [a, b] \subset \text{span}(N_{1,k}, \dots, N_{n,k})$ .

Beweis :

Für den Beweis dieser Behauptung benötigen wir die vorher definierte Marsden-Identität. Sei nun ein Polynom  $k-1$ -ten Grades durch die Funktion  $f(s) = (t-s)^{k-1}$  gegeben, so gilt für deren  $l$ -te Ableitung mit Hilfe der Marsden-Identität

$$f^{(l)}(0) = (k-1) * \dots * (k-l) (-1)^l t^{k-l-1} = \sum_{i=1}^n \varphi_{i,k}^{(l)}(0) N_{i,k}(t)$$

Somit sind also alle Polynome vom Grad  $\leq k-1$  in dem vom B-Spline enthaltenen Raum enthalten.

Somit können wir jetzt letztendlich die lokale lineare Unabhängigkeit der B-Splines  $N_{i,k}$  beweisen. Lokal deswegen, da wir natürlich nur eine lineare Unabhängigkeit der B-Splines über ein kleinstes Intervall (ein Intervall indem sich keine weiteren Knoten befinden) beweisen wollen. Gehen wir also davon aus daß wir in unserem Intervall  $[a,b]$  ein solches Intervall  $]c,d[$  existiert, dann läßt sich hierauf jedes Polynom vom Grade  $\leq k-1$  durch die entsprechenden B-Splines  $N_{i,k}$  darstellen. Da aber auf dem Intervall  $]c,d[$  nur  $k$  B-Splines von Null verschieden sind und somit linear unabhängig, ergibt sich für alle  $l$ -Intervalle daß die Basis der Splines einen Spliner Raum mit  $\dim S_{k,\Delta} = l + k$  definiert.

**4.2. Herleitung von B-Splines**

Die B-Splines haben eigentlich von der grundlegenden Struktur her sehr viel mit polynomiellen Splines der Ordnung  $k$  gemeinsam. Alle Herleitungen der Polynome basieren hier auf den selben Idee Polynome des Grades  $k-1$  lokal zu approximieren, allerdings wie schon erwähnt parametrisch. Um hier nur einmal ein Beispiel für einen solchen B-Spline zu geben, werden ich nun nachfolgend B-Splines erst einmal allgemein herleiten um dann im nächsten Kapitel den Fall für kubische B-Splines (4. Ordnung, 3. Grad) zu erklären, auch um einen direkten Vergleich zum vorhergehenden Kapitel ziehen zu können.

Die allgemeine Formel für B-Splines können wir, wie aus der Beweisführung zum Spliner Raum bereits ersichtlich, durch die Funktion

$$s(t) = \sum_{i=1}^n d_i N_{i,k}(t)$$

herleiten.

Da wir  $N_{i,k}$  bereits in der Definition des B-Splineranges definiert haben, benötigen wir jetzt noch eine Methode die „de Boor“-Punkte zu berechnen. Hierzu verwende ich folgende Definition aus dem Kapitel über „Bezier-Technik“ auf die ich hier nicht weiter eingehen werde :

$$b_{3i} = \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} b_{3i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} b_{3i+1} \quad \text{mit } h_i = t_{i+1} - t_i$$

bzw. mit Wissen der 2-fachen stetigen Differenzierbarkeit gilt auch

$$b_{3i+2} = -\frac{h_i}{h_{i-1}} d_i + \frac{h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}} b_{3i+1}$$

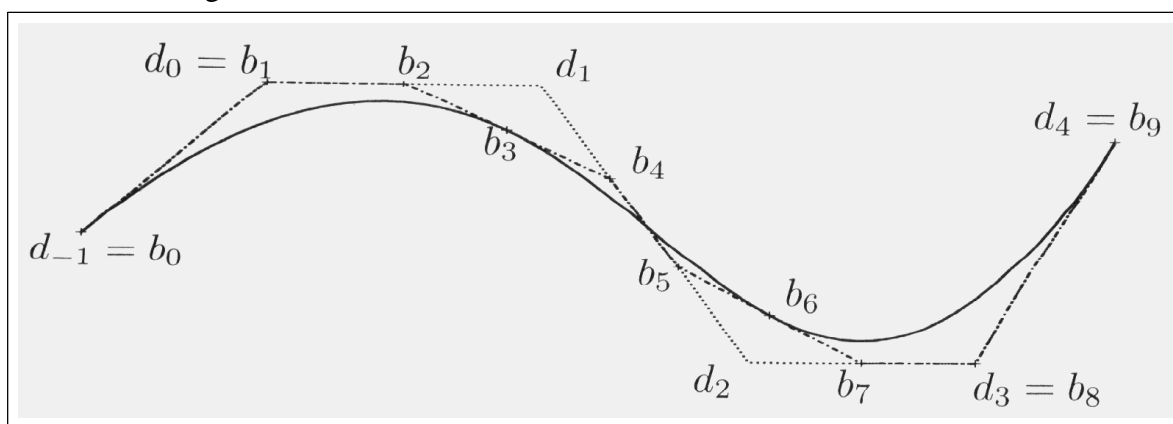
$$b_{3i-2} = \frac{h_{i-1}+h_i}{h_i} b_{3i-1} - \frac{h_{i-1}}{h_i} d_i$$

Setzen wir einmal gedanklich die Definition für  $h_i$  ein so erkennen wir aus

$$b_{3i+2} = -\frac{t_{i+1}-t_i}{t_i-t_{i-1}} d_i + \frac{-t_{i-1}+t_{i+1}}{t_i-t_{i-1}} b_{3i+1}$$

$$b_{3i-2} = \frac{-t_{i-1}+t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i} b_{3i-1} - \frac{t_i-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_i} d_i,$$

daß  $b_{3i+1}$  bzw.  $b_{3i-1}$  die Strecken zwischen  $b_{3i+2}$  und  $d_i$  bzw.  $b_{3i-2}$  und  $d_i$  für äquidistante Abstände halbiert bzw. allgemein im Verhältnis  $h_{i-1}$  zu  $h_i$  teilt.



Führe ich diesen Gedankengang weiter, so kann ich (erklärend hierzu die obige Grafik aus Deuffhard Seite 248) mir auch erklären in welchem Verhältnis  $b_{3i+1}$  zur Strecke  $d_i$ ,  $d_{i+1}$  bzw.  $b_{3i-1}$  zur Strecke  $d_i$ ,  $d_{i-1}$  steht. Für einen der beiden Strecken werde ich hier den Beweis exemplarisch antreten, für die andere Strecke ergibt sich dies auf die selbe Art und Weise.

$$b_{3i-2} = \frac{h_{i-1}+h_i}{h_i} b_{3i-1} - \frac{h_{i-1}}{h_i} d_i \quad \text{für } i$$

$$b_{3i+1} = \frac{h_i+h_{i+1}}{h_{i+1}} b_{3i+2} - \frac{h_i}{h_{i+1}} d_{i+1} \quad \text{für } i+1$$

$$b_{3i+2} = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} b_{3i+1} + \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}} d_{i+1}$$

Eingesetzt in die Gleichung

$$b_{3i+2} = -\frac{h_i}{h_{i-1}} d_i + \frac{h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}} b_{3i+1}$$

ergibt dies

$$\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} b_{3i+1} + \frac{h_i}{h_i+h_{i+1}} d_{i+1} = -\frac{h_i}{h_{i-1}} d_i + \frac{h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}} b_{3i+1}$$

$$b_{3i+1} = \frac{h_i+h_{i+1}}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}} d_i + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}} d_{i+1}$$

Für  $b_{3i-1}$  ergibt sich nach selbem Verfahren die folgenden Gleichung

$$b_{3i-1} = \frac{h_{i-2}+h_{i-1}}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i} d_i + \frac{h_i}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i} d_{i-1}$$

Wie man leicht aus den so definierten Gleichungen erkennen kann, werden hierbei Distanzen  $h$  und „de Boor“ Punkte verwendet für die wir eigentlich keine Daten vorliegen haben. Wir legen diese daher wie folgt fest :

$$h_{-1}=h_{1+1}=0$$

$$d_{-1}=b_0$$

$$d_0=b_1$$

$$d_{1+1}=b_{3+2}$$

$$d_{1+2}=b_{3(1+1)}$$



Für die praktische Anwendung von kubischen B-Splines wird meistens eine parametrische Definition der B-Spline Funktion bevorzugt, da diese relativ leicht als entsprechendes Computerprogramm umgesetzt werden kann. Die von mir nachfolgend angegebenen Gleichungen sollen nur einen groben Eindruck über eine „anwenderfreundliche“ Form der B-Splines geben. Die allgemeine Form lautet hierbei wie folgt :

$$s_i(u) = \sum_{k=-1}^2 b_k p_{i+k}$$

Unsere Stützstellen gehen hierbei parametrisch in die Definition der Punkte  $p_{i+k}$  ein. Für die Punkte  $p_i$  gilt somit

$$p_i(u) = \begin{pmatrix} t_i(u) \\ y_i(u) \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq u \leq 1$$

Die Definition der Bezierpunkte geht allerdings in das Kapitel über klassische Interpolationen und wird hier von mir nicht weiter vertieft.

Lege ich nun die Koeffizient  $b_k$  der B-Splines wie folgt fest

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \frac{(1-u)^3}{6} \\ b_0 &= \frac{u^3}{2} - u^2 + \frac{2}{3} \\ b_1 &= -\frac{u^3}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} + \frac{1}{6} \\ b_2 &= \frac{u^3}{6} \end{aligned}$$

so kann ich durch Einsetzen in die allgemeine B-Spline Funktion die nachfolgende praktisch anwendbare Form erhalten :

$$\begin{aligned} t_i(u) &= \frac{1}{6}(1-u)^3 t_{i-1} + \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)t_i + \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)t_{i+1} + \frac{1}{6}u^3 t_{i+2} \\ y_i(u) &= \frac{1}{6}(1-u)^3 y_{i-1} + \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)y_i + \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)y_{i+1} + \frac{1}{6}u^3 y_{i+2} \end{aligned}$$

Durch Variation des Parameters  $u$  kann ich nun jeweils ein Teilstück der gewünschten Kurve zwischen den Stützstellen  $t_i$  und  $t_{i+1}$  berechnen. Da unsere Gesamtkurve über alle Teilstücke allerdings auch kontinuierlich verlaufen soll und in der Definition seiner Extremstellen (wegen der Definition der Welligkeit unbedingt notwendig) eindeutig sein muß, ist es noch erforderlich diesen Tatbestand zu beweisen.

Da folgendes gilt

$$\begin{aligned} s_i(1) &= s_{i+1}(0) = \frac{p_i + 4p_{i+1} + p_{i+2}}{6} \\ s'_i(1) &= s'_{i+1}(0) = \frac{-p_i + p_{i+2}}{2} \\ s''_i(1) &= s''_{i+1}(0) = p_i - 2p_{i+1} + p_{i+2} \end{aligned}$$

können wir diese benötigten Kriterien als erfüllt ansehen.



#### 4.4. Beispielrechnung

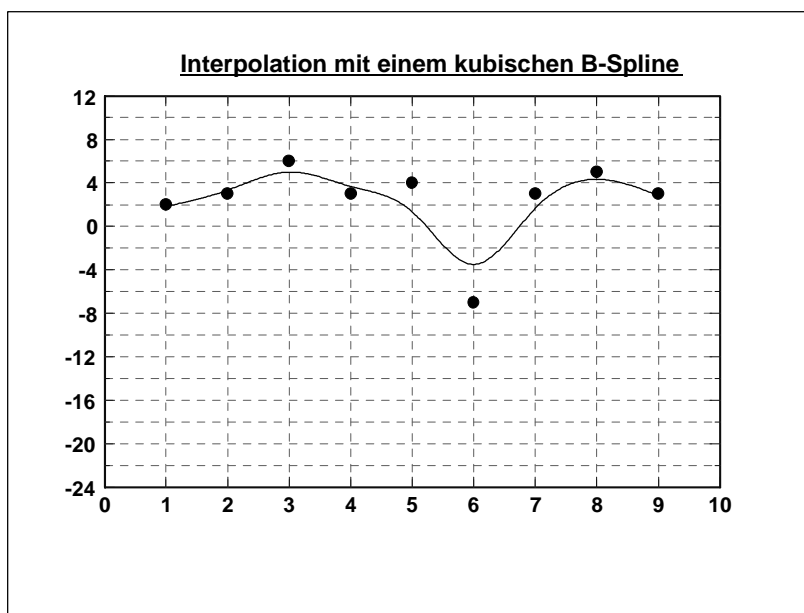
Gehen wir davon aus, daß ein einfacher kubischer B-Spline dem nachfolgendem parametrischen Gleichungssystem genügt, so erhalten wir nachfolgende Beispielrechnung

$$B_i(u) = \frac{1}{6} [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{bmatrix}$$

Für die Beispielrechnung verwende ich die bereits für normale kubische Splines verwendeten Daten  $\{t,y\}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,6\},\{4,3\},\{5,4\},\{6,-7\},\{7,3\},\{8,5\},\{9,3\}\}$  auch um einen direkten optische Vergleich ziehen zu können.

i	t <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	B <sub>i</sub> (u)
-1	0	0	
0	1	2	1,83333333
1	2	3	3,33333333
2	3	6	5
3	4	3	3,66666666
4	5	4	1,33333333
5	6	-7	-3,5
6	7	3	1,66666667
7	8	5	4,33333333
8	9	3	2,83333333
9	10	0	

Stellen wir die so gewonnen Daten einmal grafisch dar, so erhalten wir folgende Kurve :



## **Anhang : Literaturverzeichnis**

**Deuflhard, Peter/Hohmann Andreas** : „Numerische Mathematik I“, de Gruyter, Berlin/New York, 1993, S. 234-253

**Gerhard Opfer** : „Numerische Mathematik für Anfänger“, FriedrichVieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1993, S. 55-63

**Gerald, Curtis F./Wheatley, Patrick O.** : „Applied Numerical Analysis“, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Menlo Park, California, 1989, S. 207-228

**Werner, Jochen** : „Numerische Mathematik 1“, FriedrichVieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1992, S. 160-191